E.N.S.I - Option TA -Session 1979
PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Durée : 4 heures

Un corrigé

Partie I

1.
- La fonction $f_1 \in E$ si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t_0 \geq 0$ tel que la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ soit bornée sur $[t_0, +\infty[$. Ceci est vérifié si $\alpha > 0$ et $t_0 = 0$. Donc pour tout $\alpha > 0$, il existe $M = 1$ et $t_0 = 0$ tel que $\forall t \geq t_0$, $1 \leq e^{\alpha t}$. Donc $f_1 \in E$.
- Par croissance comparée des fonctions polynômes et exponentielles, on sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} t^n = 0$. De plus, si $\alpha < 0$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-\alpha t} t^n = +\infty$. Donc $f_2 \in E$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $t_0 = 0$.
- On a $t \mapsto e^{-\alpha t} e^{Ct} = e^{-(\alpha - C)t}$ est bornée au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, $\alpha > C$. Donc $f_3 \in E$ avec $\alpha \in]C, +\infty[$ et $t_0 = 0$.
- Il faut faire attention à distinguer les cas $C \geq 0$ et $C < 0$. Si $C \geq 0$, on a

$$\operatorname{sh}(Ct) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{Ct}}{2}$$

et donc la fonction $e^{-\alpha t}\operatorname{sh}(Ct)$ est bornée au voisinage de l'infini si et seulement si $C < \alpha$. Si $C < 0$, alors

$$\operatorname{sh}(Ct) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{e^{-Ct}}{2}$$

et donc la fonction $e^{-\alpha t}\operatorname{sh}(Ct)$ est bornée au voisinage de l'infini si et seulement si $C < -\alpha$. Dans tous les cas, on a prouvé que $f_4 \in E$ avec $\alpha \in]|C|, +\infty[$ et $t_0 = 0$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $|e^{-\alpha t}\sin(Ct)| \leq e^{-\alpha t}$. Cette dernière fonction est bornée au voisinage de $+\infty$ si $\alpha \geq 0$. De plus, si $\alpha < 0$, choisissant $t = \dfrac{\pi}{2C} + \dfrac{2k\pi}{C}$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} |e^{-\alpha t}\sin(Ct)| = \lim\limits_{k\to+\infty} e^{-\alpha t} = +\infty$. Ainsi, $f_5 \in E$ avec $\alpha \geq 0$ et $t_0 = 0$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t} e^{t^2} = e^{\frac{-\alpha^2}{4}} e^{\left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2}$ n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$, donc $f_6 \notin E$. Par contre la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t} e^{-t^2}$ est bornée sur $[0, +\infty[$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $f_7 \in E$.

2. La fonction $t \mapsto e^{-at}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et on a $e^{-at} \underset{+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$ converge. De plus, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X e^{-at}\mathrm{d}t = \lim_{X\to+\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_0^X = \frac{1}{a}$.

3. Pour tout $x > \alpha$, on a $e^{-xt}|f(t)| \leq g(t)$ où $g(t) = Me^{-(x-\alpha)t}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t$ converge d'après ce qui précède et puisque $x - \alpha > 0$. Donc par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}|f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Si $x_1 \in \mathbf{D}$, alors pour tout $x_2 \geq x_1$, la fonction $t \mapsto e^{-x_2 t}|f(t)|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $x_2 \in \mathbf{D}$ et donc l'ensemble $\mathbf{D}$ est de l'une des quatre formes suivantes : $\varnothing$, $\mathbb{R}$, $[A, +\infty[$ ou $]A, +\infty[$ suivant les valeurs de $\inf \mathbf{D}$. Si on pose $A = +\infty$ si $\mathbf{D} = \varnothing$, $A = -\infty$ si $\mathbf{D} = \mathbb{R}$, alors $\mathbf{D}$ est de la forme $]A, +\infty[$ ou $[A, +\infty[$.

4.
- La fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$ et on a, pour tout $x > 0$:

$$\mathbf{L}[f_1](x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-xt}}{x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

- De même, la fonction $t \mapsto t^n e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$ et on a, pour tout $x > 0$:
$$\mathbf{L}[f_2](x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\mathrm{d}t = x^{n+1}\int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}}$$
où Γ est la fonction Γ définie sur $]0, +\infty[$ par $\Gamma(r) = \displaystyle\int_0^{+\infty} s^{r-1}e^{-s}\mathrm{d}s$.
- La fonction $t \mapsto e^{-(x-C)t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si, $x > C$ et on a, pour tout $x > C$:
$$\mathbf{L}[f_3](x) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-C)t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-(x-C)t}}{x-C}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-C}.$$

(a) Par linéarité de l'intégrale et pour $x > |C|$, on a :
$$\mathbf{L}[f_4](x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(x-C)t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(x+C)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-C} - \frac{1}{x+C}\right) = \frac{C}{x^2-C^2}.$$

- Pour $x > 0$ et à l'aide d'une intégration par parties, on a :
$$\begin{aligned}
\mathbf{L}[f_5](x) &= \int_0^{+\infty} \sin(Ct)e^{-xt}\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(Ct)}{-x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} + \frac{C}{x}\int_0^{+\infty}\cos(Ct)e^{-xt}\mathrm{d}t && (1)\\
&= \frac{C}{x}\int_0^{+\infty}\cos(Ct)e^{-xt}\mathrm{d}t && (2)\\
&= \frac{C}{x}\left(\left[\frac{\cos(Ct)}{-x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} - \frac{C}{x}\int_0^{+\infty}\sin(Ct)e^{-xt}\mathrm{d}t\right) && (3)\\
&= \frac{C}{x^2} - \frac{C^2}{x^2}L[f_5](x) && (4)
\end{aligned}$$
D'où $\mathbf{L}[f_5](x) = \dfrac{C}{x^2+C^2}$.

Partie II

1. Cette propriété découle de celle la linéarité de l'intégrale.

2. (a) Soit à calculer, pour $x > x_0$:
$\mathbf{L}[f'](x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt}f'(t)\mathrm{d}t$. En intégrant par parties, on obtient :
$$\mathbf{L}[f'](x) = \left[e^{-xt}f(t)\right]_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} e^{-xt}f(t)\mathrm{d}t,$$
soit finalement :
$$\mathbf{L}[f'](x) = x\mathbf{L}[f](x) - f(0).$$
Soi $m = \inf(\mathbf{D}\cap\mathbf{D}')$. Si m est fini alors pour tout $x \in \mathbf{D}\cap\mathbf{D}'$, il existe $x_0 \in \mathbf{D}\cap\mathbf{D}'$ tel que $x > x_0 \geq m$ et donc la formule en question est bien vérifiée.
Si $m = -\infty$, alors pour tout $x \in \mathbf{D}\cap\mathbf{D}'$, il existe $x_0 \in \mathbf{D}\cap\mathbf{D}'$ tel que $x > x_0$ et là encore la formule en question est bien vérifiée.

(b) Il suffit d'appliquer le résultat précédent à f' puis à f pour tout $x > x_0$: $\mathbf{L}(f'')(x) = x\mathbf{L}(f')(x) - f'(0) = x(x\mathbf{L}(f)(x) - f(0)) - f'(0) = x^2\mathbf{L}(f)(x) - xf(0) - f'(0)$.
Comme précédemment, l'égalité est vraie pour tout $x \in \mathbf{D}\cap\mathbf{D}'\cap\mathbf{D}''$.

(c) Le résultat se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbf{D} \cap \mathbf{D'} \cap ... \cap \mathbf{D}^{(n)},\ \ \mathbf{L}[f^{(n)}](x) = x^n \mathbf{L}[f](x) - x^{n-1}f(0) - x^{n-1}f'(0) - ... - xf^{n-2}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

où $D^{(k)}$ désigne l'intervalle de définition de $f^{(n)}$.
Si $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = 0$, la relation devient $\mathbf{L}[f^{(n)}](x) = x^n \mathbf{L}[f](x)$ pour tout $x \in \mathbf{D} \cap \mathbf{D'} \cap ... \cap \mathbf{D}^{(n)}$.

Partie III

1. La réciproque une application linéaire est linéaire.

2. (a) C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Notons $Y = \mathbf{L}[y]$ la transformée de Laplace de y.

$$\mathbf{L}(y'' + y' - 2y)(x) = \mathbf{L}[t \mapsto e^{-t}](x) x^2 Y(x) - xy(0) - y'(0) + xY(x) - y(0) - 2Y(x) = \frac{1}{x+1}$$

D'où

$$(x^2 + x - 2)Y(x) - 1 = \frac{1}{1+x}$$

ou encore $Y(x) = \mathbf{L}[y](x) = \dfrac{1}{x^2-1} = \mathbf{L}[t \mapsto \mathrm{sh}(t)]$
La décomposition en éléments simples de la fraction permet de remonter à la fonction causale. Y est donc la transformée de Laplace de :

$$t \mapsto y(t) = \mathrm{sh}(t)$$

(b) On commence par résoudre l'équation homogène $y'' + y' - 2y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$, dont les racines sont 1 et -2. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-2t}.$$

Comme -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme $y(t) = ae^{-t}$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (a - a - 2a)e^{-t} = e^{-t},$$

on en déduit que $a = \dfrac{-1}{2}$. Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Si on ajoute les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$, on obtient les équations

$$\lambda + \mu - \frac{1}{2} = 0 \text{ et } \lambda - 2\mu + \frac{1}{2} = 1,$$

soit $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = 0$. La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \mathrm{sh}(t).$$

3. (a) Si on applique la transformée de Laplace au système différentiel, on obtient le système linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xY_1(x) - 8 & = & 2Y_1(x) - 3Y_2(x) \\ xY_2(x) - 3 & = & -2Y_1(x) + Y_2(x) \end{array} \right. .$$

On va résoudre ce système pour calculer $Y_1(x)$ et $Y_2(x)$. Il est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl}(x-2+1)Y_1(x)+3Y_2(p) & = & 8\\ 2Y_1(x)+(x-1)Y_2(x) & = & 3\end{array}\right. .$$

On trouve $Y_1(x) = \dfrac{8x-17}{x^2-3x-4} = \dfrac{5}{x+1} + \dfrac{3}{x-4} = L(t \mapsto 5e^{-t}+3e^{4t})$ et $Y_2(x) = \dfrac{3x-22}{x^2-3x-4} = \dfrac{5}{x+1} - \dfrac{2}{x-4} = L(t \mapsto 5e^{-t}-2e^{4t})$.
On en déduit, en inversant la transformée de Laplace, que $y_1(t) = 5e^{-t}+3e^{4t}$ et $y_2(t) = 5e^{-t}-2e^{4t}$, et on vérifie facilement qu'il s'agit d'une (de la) solution du système différentiel.

(b) Introduisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix},$$

de sorte que le système $(\mathscr{E}_2)$ s'écrit $X' = AX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix}$. Ses valeurs propres sont -1 et 4, avec vecteurs propres respectifs $(1,1)$ et $(3,-2)$. Les solutions sont donc données par les couples s'écrivant

$$X(t) = \Lambda e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu e^{4t}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales $y_1(0) = 8$ et $y_2(0) = 3$ impliquent $\lambda = 5$ et $\mu = 1$. En particulier $y_1(t) = 5e^{-t}+3e^{4t}$ et $y_2(t) = 5e^{-t}-2e^{4t}$.

••••••••••